Cálculo 3A – EP12 – Integral de superfície de campo escalar e aplicações.

Exercício 1: Calcule $\iint_S \left(z - x^2 + xy^2 - 1\right) dS$, onde S é a superfície $\varphi(u,v) = u\,\vec{\mathbf{i}} + v\,\vec{\mathbf{j}} + (u^2+1)\vec{\mathbf{k}}$ com $0 \le u \le 1$ e $0 \le v \le 2$.

Exercício 2: Calcule $\iint_S f(x,y,z)\,dS$, onde $f(x,y,z) = x^2 + y^2$ e $S : x^2 + y^2 + z^2 = 4$, com $z \ge 1$.

Exercício 3: Calcule $\iint_S x^2 z\,dS$, onde S é o cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, com $0 \le z \le 1$.

Exercício 4: Calcule $\iint_S x\,dS$, onde S é o triângulo com vértices $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$.

Exercício 5: Seja S a porção do cone $z = \sqrt{x^2+y^2}$ limitado pelos planos $z = 1$ e $z = 4$.

a) Parametrize S usando as coordenadas cartesianas.

b) Parametrize S usando as coordenadas polares.

c) Calcule $\iint_S z^2\,dS$.

Exercício 6: Calcule a massa da superfície S parte do plano $z = 2 - x$ dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$, sendo a densidade dada por $\delta(x,y,z) = y^2$.

Exercício 7: Determine o momento de inércia em relação ao eixo da superfície S parte do cone $z^2 = x^2 + y^2$ entre os planos $z = 1$ e $z = 2$, sendo a densidade constante.

Exercício 8: Uma lâmina superficial S tem a forma de um cone dado por $z = 4 - 2\sqrt{x^2+y^2}$ e limitado pelo plano xy. Em cada ponto de S a densidade é proporcional à distância entre o ponto e o eixo z. Mostre que o momento de inércia em relação ao eixo z é igual a $\frac{12}{5}M$, onde M é a massa de S.

Respostas

Exercício 1: $\frac{2}{9}(5\sqrt{5} - 1)$.

Exercício 2: $\frac{20\pi}{3}$.

Exercício 3: $\frac{\pi a^3}{2}$.

Exercício 4: $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Exercício 5: (a) $\varphi(x,y) = (x, y, \sqrt{x^2+y^2})$, $(x,y) \in D : 1 \le x^2 + y^2 \le 16$; (b) $\varphi(r\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, r)$, $(r,\theta) \in [1,4] \times [0, 2\pi]$; (c) $\frac{255\sqrt{2}\,\pi}{2}$.

Exercício 6: $\frac{\sqrt{2}\,\pi}{4}$ *u.m.*

Exercício 7: $\frac{15\sqrt{2}\,\rho\,\pi}{2}$.

Exercício 8: $I_z = \frac{64\sqrt{5}\,k\,\pi}{5}$ e $M = \frac{16\sqrt{5}\,k\pi}{3}$ $u.m.$.